نام و نام خانوادگی :

شماره دانشجویی :

نام درس : احتمال مهندسی

رشته و مقطع : کارشناسی

نام استاد :

نیمسال : دوم — سال تحصیلی: ۹۵-۹۶

تاریخ امتحان : ۹۶/۳/۱۸ — مدت پاسخگویی : ۷۵ دقیقه

پروژه و تحقیق	حضور در کلاس	میان ترم	پایان ترم	نمره نهایی

۱- سه تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر در این سه پرتاب ۵ ظاهر نشود ۱۰۰ ریال ضرر می‌کنیم ولی اگر یک ۵ ظاهر شود ۱۰۰ ریال برنده می‌شویم و برای ظاهر شدن ۲ تا ۵ و ۳ تا ۵ به ترتیب ۲۰۰ و ۴۰۰ ریال برنده خواهیم شد. اگر X میزان برد این مسابقه باشد امید ریاضی آن را به دست آورید. (۳ نمره)

حل :

$$P\{X=-100\}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

$$P\{X=100\}=\binom{3}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{75}{216}$$

$$P\{X=200\}=\binom{3}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{15}{216}$$

$$P\{X=400\}=\binom{3}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

$$E[X]=\sum_{x:P\{X=x\}\neq 0} xP\{X=x\}=(-100)*\frac{125}{216}+(100)*\frac{75}{216}+(200)*\frac{15}{216}+(400)*\frac{1}{216}=\frac{-1600}{216}$$

به عبارت دیگر این بازی به طور متوسط به ضرر خواهد بود.

۲- یکی از دو تابع زیر می‌تواند تابع چگالی احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته باشند: (۴ نمره)

$$f2_X(x)=\begin{cases}c(x^3+x^2) & -1<x<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}\qquad f1_X(x)=\begin{cases}c(2x+x^2) & -1<x<1\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

ابتدا با استدلال آن تابع را به مشخص کرده و سپس برای آن تابع: الف) مقدار c را به دست آورده و $E[e^{tX}]$ را محاسبه کنید. ب) اگر $Y=1-X^2$، تابع چگالی احتمال Y را محاسبه کنید.(۵ نمره)

حل:

همان طور که قبلا بیان شده دو ویژگی برای تابع چگالی احتمال وجود دارد a- مقدار انتگرال در کل بازه باید برابر ۱ شود و b- مقدار آن همیشه نامنفی باشد. برای آنکه تابعی همیشه نامنفی باشد باید در بازه غیر صفر دارای مشتق صفرنباشد.

$\frac{d}{dx}(f1_X(x))=\frac{d}{dx}(x^3+x^2)=3x^2+2x=0$ چون $x=\frac{-2}{3}$ دربازه ۱- تا ۱ وجود داردپس حتما در نقاطی منفی خواهد شد.

$\frac{d}{dx}(f2_X(x))=\frac{d}{dx}(2x+x^2)=2+2x=0$ چون $x=-1$ نقطه مرزی است پس می‌تواند همیشه مثبت باشد.

الف)

$$\int_{-1}^{1}c(x^2+2x)dx=c\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)_{-1}^{1}=\frac{2c}{3}=1\Rightarrow c=\frac{3}{2}$$

$$E\{e^{tX}\}=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}e^{tx}(x^2+2x)dx=\frac{3}{2}e^{tx}(\frac{1}{t}(x^2+2x)+\frac{1}{t^2}(x+2)+\frac{2}{t^3})_{-1}^{1}=...$$

ب)

$$F_Y(y)=P\{Y<y\}=P\{1-X^2<y\}=P\{1-y<X^2\}=P\{\sqrt{1-y}<X\}=1-F_X(\sqrt{1-y})$$

$$f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\frac{d}{dy}(1-F_X(\sqrt{1-y}))=\frac{1}{2\sqrt{1-y}}\ f_X(\sqrt{1-y})$$

۳- فرض کنید تاس سالمی را ۶۰۰ مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی تعداد ۶ها باشد، احتمال آنکه $97\le X\le 103$ باشد را به دو روش زیر محاسبه کنید: (۴ نمره)

الف) X متغیر تصادفی دوجمله‌ای باشد. ب) X را با متغیر تصادفی پیوسته‌ی نرمال تقریب بزنیم. (برای قسمت الف فقط کافی است جواب را به صورت سری نشان دهید)

حل

الف) برای این متغیر تصادفی $p=1/6$ و $n=600$

$$P\{97\le X\le 103\}=\sum_{i=97}^{103}\binom{600}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{600-i}$$

ب) $\mu=\frac{600}{6}=100,\sigma^2=np(1-p)=\frac{500}{6}$

$$P\{97\le X\le 103\}=P\{96.5\le Z\le 103.5\}=P\{\frac{96.5-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\le\frac{Z-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\le\frac{103.5-100}{\sqrt{\frac{500}{6}}}\}=$$

$$\phi(\frac{3.5}{\sqrt{\frac{500}{6}}})-\phi(\frac{-3.5}{\sqrt{\frac{500}{6}}})=2\phi(\frac{3.5}{\sqrt{\frac{500}{6}}})-1$$

۴- در تابع چگالی توام زیر، c را طوری تعیین کنید که $f_{X,Y}$ یک تابع چگالی توام باشد و سپس مقادیر خواسته شده را به دست آورید. (۵ نمره)

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}c(xy) & 0\le x\le y<1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

الف) محاسبه‌ی $P\{X<Y+1\}$ و $P\{X<.5\}$ ب) توابع چگالی کناری f_X و f_Y پ) محاسبه‌ی $P\{\frac{X}{Y}<0.5)$

حل

الف)

$$\int_0^1 dx\int_x^1 cxydy=\int_0^1 dx(\frac{cxy^2}{2})_x^1=\int_0^1 dx(\frac{cx}{2}-\frac{cx^3}{2})=\frac{c}{8}=1\rightarrow c=8$$

چون $X<Y$ است پس حتما $X<Y+1$ و در نتیجه احتمال برابر ۱ است.

$$P\{X<0.5\}=\int_0^{0.5}dx\int_x^1 8xydy=\int_0^{0.5}dx(\frac{8x}{2}-\frac{8x^3}{2})=...$$

ب)

$$f_X(x)=\int_x^1 8xydy=4x-4x^3$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 8xydy=4y^3$$

پ) $P\{\frac{X}{Y} < 0.5\} = P\{2X < Y\} = \int_{0}^{0.5} dx \int_{2x}^{1} 8xydy = \int_{0}^{0.5} dx(\frac{8x}{2} - \frac{32x^3}{2}) = ...$

۵- فرض کنید X_1 ، X_2 دو متغیر تصادفی مستقل با میانگین صفر و واریانس ۱ هستند و

$$Y_1 = 2X_1 + X_2$$
$$Y_2 = 3X_1 - X_2$$

مقادیر COV(Y1,Y2) و واریانس Y_1 را بدست آورید. (۳نمره)

حل :

COV(Y1,Y2)= COV(2X1,3X1)+ COV(2X1,-X2)+ COV(X2,3X1)+ COV(X2,-X2)=6+0+0-1=5

$$\mathrm{var}(Y)_1 = \mathrm{var}(2X_1 + X_2) = \mathrm{var}(2X_1) + \mathrm{var}(X_2) = 4\,\mathrm{var}(X_1) + \mathrm{var}(X_2) = 5$$