حل سری ۴

۱–در این حالت ۲۱۶ مجموع سه تاس می‌تواند اعداد ۳ تا ۱۸ باشد که برخی از آنها عبارت است از:

$$P\{X=3\}=(\frac{1}{6})^3, P\{X=4\}=\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^3, P\{X=5\}=\binom{3}{2}(\frac{1}{6})^3+\binom{3}{1}(\frac{1}{6})^3,...$$

دقت کنید در حالت X=5 باید دوتاس ۲ و یک تاس یک باشد یا دوتاس یک و یک تاس ۳ باشد.

۲–

با توجه به مباحث بیان شده تنها در نقاط ناپیوستگی تابع احتمال غیر صفر است پس داریم:

$$P\{X=0\}=F_X(0)-F_X(0^-)=.4-0=0.4$$
$$P\{X=0.3\}=F_X(0.3)-F_X(0.3^-)=.7-.4=0.3$$
$$P\{X=1.2\}=F_X(1.2)-F_X(1.2^-)=1-.7=0.3$$

۳–الف) در این حالت $P\{X=i\}=\frac{1}{10}$ ودر نتیجه امید ریاضی برابر $\sum_{i=1}^{10} i*p\{X=i\}=\sum_{i=1}^{10}\frac{i}{10}=5.5$.

ب) این حالت با یک مثال توضیح داده می‌شود و سپس جواب بیان می‌شود. فرض کنید عدد انتخابی ۶ باشد. در سوال اول گفته می‌شود که آیا عدد انتخابی از ۵ بزرگتر است یانه؟ در مرحله ۲ گفته می‌شود که آیا عدد انتخابی از ۸ بزرگتر است یا نه (در صورتی که جواب خیر بود عدد از ۳ کوچکتر است یا نه). مر حله بعد نیز نصف خواهد شد. در این صورت اگر اعداد ۱،۲ ،۳، ۶، ۷، ۸؛ باشد به چهار سوال نیاز است و اگر اعداد ۴،۵،۹،۱۰ باشد به سه سوال نیاز است که امید ریاضی تعداد سوال‌ها برابر ۳٫۶ خواهد شد که کمتر از حد بالاست.

۴–

$$Var(X)=E[X^2]-(E\{X\})^2 \Rightarrow E[X^2]=Var(X)+(E\{X\})^2=7+25=32$$
$$a)E[(2+X)^2]=E[4+4X+X^2]=4+4*5+32=56$$
$$b)Var(3X+4)=Var(3X)=9Var(X)=63$$

۵– X تعداد ۵ ظاهر شده و Y مقدار پول برنده شده

$$P\{Y=-100\}=P\{X=0\}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216},\ P\{Y=100\}=P\{X=1\}=\binom{3}{1}\left(\frac{5}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{75}{216},$$

$$P\{Y=200\}=P\{X=2\}=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216},\ P\{Y=400\}=P\{X=3\}=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

$$\Rightarrow E[Y]=(-100*\frac{125}{216}+100*\frac{75}{216}+200*\frac{15}{216}+400*\frac{1}{216}=\frac{-1600}{216}$$

یعنی در نهایت در این بازی ضرر خواهد بود.

۶-

همان طور که اشاره شد در بسیاری موارد به راحتی می‌توان با تغییر واحد λ متغیر تصادفی پواسون جدیدی به دست آورد (همانند مسئلهٔ زلزله‌ها) [همان طور که اشاره شد λ میانگین متغیر تصادفی پواسون نیز هست]

الف)

$$\lambda=\frac{\text{۱ نقص}}{150\,cm}$$

$$\Rightarrow \lambda_2=1.5\ \frac{\text{نقص}}{225\,cm}$$

$$P(X=0)=e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^0}{0!}=e^{-1.5}$$

ب)

$$\lambda_3=3\ \frac{\text{نقص}}{450\,cm}\Rightarrow P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)$$

۷-

الف)

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{4 - X^2 \le y\}$$

$$= P\{4-y \le X^2\} = P\{X \ge \sqrt{4-y} \text{ یا } X \le -\sqrt{4-y}\}$$

$$= P(X \ge \sqrt{4-y}) + \underbrace{P(X \le -\sqrt{4-y})}_{0} = 1 - F_X(\sqrt{4-y})$$

زیرا $0 \le X \le 1$ است

$$\Rightarrow \underbrace{f_Y(y)}_{=\frac{dF_Y(y)}{dy}} = \frac{+1}{2\sqrt{4-y}} f_X(\sqrt{4-y}) = \begin{cases} \frac{+1}{2\sqrt{4-y}}\, 3(4-y) & 0 \le 4-y \le 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

ب)

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\} = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ & \\ 1 & y \ge 1 \end{cases}$$

به ازای $0 \le y < 1$ ، باید نقاطی در نظر گرفته شود که $g(x) = 0$ یعنی $0 \le x \le \frac{1}{2}$

$$\underset{0 \le y < 1}{P\{g(X) \le y\}} = P\{g(X) = 0\} = \int_0^{1/2} 3x^2\,dx = \frac{1}{8}$$

بنابراین $F_Y(y)$ یک متغیر تصادفی گسسته است که $P(Y=0) = \frac{1}{8}$ و $P(Y=1) = \frac{7}{8}$

$$Y = (-1)^X$$

Y تنها می‌تواند اعداد ۱ و ۱- را اختیار کند

$$P\{Y=-1\} = P\{X=1 \text{ یا } X=3 \text{ یا } X=5 \text{ یا } \dots\} = P(X=1)+P(X=3)+\dots$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X=2i+1) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i+1} = \frac{2}{3}$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=0 \text{ یا } X=2 \text{ یا } X=4\} =$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\{X=2i\} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2i} = \frac{1}{3}$$

$$E[Y] = \frac{2}{3} \times -1 + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{-1}{3}$$

$$E[Y^2] = \frac{2}{3} \times (-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1)^2 = 1 \Rightarrow Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2$$

$$= 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

۹-

$$P\{X=1\} = cP\{X=0\}, \qquad P\{X=2\} = cP\{X=1\} = c^2 P\{X=0\}$$

$$P\{X=2\} + P\{X=1\} + P\{X=0\} = 1 \Rightarrow (c^2+c+1)P\{X=0\} = 1 \Rightarrow p\{X=0\} = \frac{1}{c^2+c+1}$$

$$E[X] = 0 * P\{X=0\} + 1 * P\{X=1\} + 2 * P\{X=2\} = (c+2c^2)P\{X=0\} = \frac{c+2c^2}{c^2+c+1}$$

۱۰-

الف) $\sum_{i=4700}^{5300} \binom{10000}{i} (\frac{1}{2})^i (\frac{1}{2})^{10000-i}$ ب) $\lambda = np = 5000, \sum_{i=4700}^{5300} \frac{e^{-5000}(5000)^i}{i!}$

پ)

$\mu = 5000, \sigma^2 = 2500$

$$P\{4700 \le X \le 5300\} = P\{\frac{4699.5 - 5000}{50} \le \frac{X - 5000}{50} \le \frac{5300.5 - 5000}{50}\} = \varphi(6) - \varphi(-6) = 2\varphi(6) - 1$$