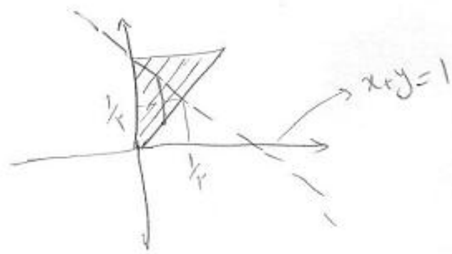
حل سری ۵

-۱

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_0^1\left(\int_0^y a(x+y)\,dx\right)dy = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{ax^2}{2}+axy\right)_0^y dy = \int_0^1 \frac{3ay^2}{2}\,dy = 1 \Rightarrow \frac{a}{2}y^3\Big]_0^1 = 1 \Rightarrow a=2$$

الف)



$$P(X<Y) = \int_0^{1/2}\left(\int_x^{1-x} 2(x+y)\,dy\right)dx$$

با توجه به شکل

$0<x<1/2$

$x<y<1-x$

$$= \int_0^{1/2}\left(2y^2+2xy\right)_x^{1-x} dx$$

$$= 2\int_0^{1/2}\left[(1-x)^2+2x(1-x)-2x^2-2x^2\right]dx = \ldots$$

ب) $P\{X<Y\}$ همان طور که از الف مشخص است همیشه $x<y$ است پس احتمال مورد نظر برابر $\frac{1}{2}$ است

پ)

$$P\{X<0.5\} = \int_0^{1/2}\left[\int_x^1 2(x+y)\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^{1/2}\left(2y^2+2xy\right)_x^1 dx$$

$$= \int_0^{1/2}\left[2x+2-4x^2\right]dx$$

-۲

با توجه به شرایط $f_{X,Y}(x,y)$ دو متغیر X و Y مستقل هستند و $f_{X|Y=y}(x|y)=f_X(x)$

و $f_{Y|X}(y|x)=f_Y(y)$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy=\int_0^1 4xy\,dy=2x\left(y^2\right]_0^1=2x$$

$$f_Y(y)=2y$$

$$P\{0.2<X<1.2\mid Y=0.5\}=\int_{0.2}^{1.2} f_{X|Y=0.5}(x|0.5)\,dx$$

$$=\int_{0.2}^{1.2} f_X(x)\,dx=\int_{0.2}^{1}(2x)\,dx=x^2\Big]_{0.2}^{1}=0.96$$

$$P\{0.3<Y<0.7\mid X=0.5\}=\int_{0.3}^{0.7} f_{Y|X=0.5}(y|0.5)\,dy=\int_{0.3}^{0.7}2y\,dy=$$

$$y^2\Big]_{0.3}^{0.7}=0.49-0.09=0.4$$

-۳

$$F_Z(a) = P\{Z \leq a\} = P\left\{\frac{X}{X+Y} \leq a\right\}$$

$$= P\{X \leq aX + aY\} = P\{(1-a)X \leq aY\}$$

همان طور که از تعریف مشخص است X و Y دو عدد مثبت هستند

$$P\left\{X \leq \frac{a}{1-a}Y\right\} = \begin{cases} 0 & \frac{a}{1-a} < 0 \\ \int_0^\infty \int_0^{\frac{ay}{1-a}} 6e^{-2x}e^{-2y}\,dy\,dx & \frac{a}{1-a} > 0 \Rightarrow 0 < a < 1 \end{cases}$$

-۴

$$Y = aX + b$$

$$\mathrm{Cov}(aX+b, X) = E[aX^2 + bX] - (E[aX+b])(E[X])$$

$$= aE[X^2] + bE[X] - \left[a(E[X])^2 + bE[X]\right]$$

$$= aE[X^2] - a(E[X])^2 = a\,\mathrm{Var}(X)$$

$$\mathrm{Var}(Y) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$$

$$\rho(X,Y) = \frac{a\,\mathrm{Var}(X)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,a^2\mathrm{Var}(X)}} = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & a > 0 \\ -1 & a < 0 \end{cases}$$

-۵

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{۶} & -۳ < x < ۳ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$Cov(X, Y) = Cov(X, X^۲) = E[X^۳] - E[X]\,E[X^۲] = ۰$$

$$Var(X) = E[X^۲] - (E[X])^۲ =$$

$$Var(Y = X^۲) = E[X^۴] - (E[X^۲])^۲$$

$$E[X] = \int_{-۳}^{۳} \frac{1}{۶} x\,dx = ۰ \qquad E[X^۲] = \int_{-۳}^{۳} \frac{1}{۶} x^۲\,dx = \frac{x^۳}{۱۸}\Big]_{-۳}^{۳} = ۳$$

$$E[X^۳] = \int_{-۳}^{۳} \frac{1}{۶} x^۳\,dx = ۰ \qquad E[X^۴] = \int_{-۳}^{۳} \frac{1}{۶} x^۴\,dx = \frac{1}{۳۰} x^۵\Big]_{-۳}^{۳}$$

$$= \frac{۴۸۶}{۳۰} = ۱۶,۲$$

به عبارتی دیگر X و $X^۲$ ناهمبسته اند.

۶-

$$f_X(x) = \begin{cases} ۱ & ۰ < x < ۱ \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$E[e^{tX}] = \int_۰^۱ e^{tx}\,dx = \frac{1}{t} e^{tx}\Big]_۰^۱$$

$$= \frac{1}{t}(e^t - 1)$$

اگر X و Y مستقل باشند (در سؤال ذکر شده)

$$E[e^{tZ}] = E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}]$$

$$= \frac{1}{t^۲}(e^t - 1)^۲$$

بنابراین جمع دو متغیر تصادفی یکنواخت یک متغیر تصادفی یکنواخت نیست

ب) $Z = X + Y$

$$E[e^{tX}] = E[e^{tY}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$E[e^{tZ}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^۲$$

شباهتی به رابطهٔ فوق ندارد

۷ – جواب سوال طولانی

الف) $1 \le X \le 6, 2 \le Y \le 12,$ ،

ب) $1 \le X \le 6, 1 \le Y \le 6,\ X \le Y$

۸و۹ حذف

۱۰–الف)

$$COV(2X_1 + 3X_2, X_4) = 2COV(X_1, X_4) + 3COV(X_2, X_4) =$$
$$0 + 0 = 0$$

ب)

$$COV(X_1 + X_2, 4X_1 + X_3) =$$
$$4COV(X_1, X_1) + COV(X_1, X_3) + 4COV(X_2, X_1) + COV(X_2, X_3) =$$
$$4 + 0 + 0 + 0 = 4$$

پ)به دلیل مستقل بودن Xiها داریم:

$$Var(X_1 + 2X_2 + 3X_3) = Var(X_1) + Var(2X_2) + Var(3X_3) + Var(4X_4) =$$
$$Var(X_1) + 4Var(X_2) + 9Var(X_3) + 16Var(X_4) = 30$$